第2章　通信中的随机信号分析

本章教学基本要求

1、理解随机变量和随机过程的概念及数学描述。

2、掌握统计平均和自相关函数的计算方法。

3、熟悉噪声的分类和性质，特别是高斯白噪声的特点。

4、学习随机过程通过线性系统的基本理论，了解用功率谱密度描述和处理随机信号的方法。

本章主要内容

主要外语词汇

随机信号（**Random Signal**）

随机变量（**Random Variable**）

高斯随机过程（**Gaussian Random Process**）

高斯白噪声（**White Gaussian Noise**）

加性高斯白噪声（**AWGN--Additive White Gaussian Noise** ）

作业

P_{43}页：3，6，11，12，14

2.1 随机变量及其数学描述

(*Random Variable*)

一、随机事件及概率：

1、随机现象：

自然界和人类社会中总存在一些不可预测的、偶然性的、毫无规律的现象，如投掷硬币那面向上、落叶的位置、气体分子热运动轨迹、噪声等，在每次试验其结果呈现出不确定性。它们被归类为随机事件。

基本概念：

样本：随机现象的某次出现（观测、 实验）。

事件：样本的结果。

样本空间：无穷多（大量）样本的全体（可能的试验结果）。

事件空间：结果的集合，可能无穷多， 也可能只有少数几种。

一般特征：

随机性表现为样本的偶然性和事件的不可预知性。

2、概率（probability）

（1）随机现象的规律性表现在大量样本的统计特性上。

单个看来毫无规律的样本，其集体行为却表现出规律：

设N次观测中事件A出现了m_A次，A发生的频率为 $\dfrac{m_A}{N}$。

当N很大时，$\dfrac{m_A}{N}$ 有确定的比值。

（2）定义：$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{m_A}{N}$$ 为事件A出现的概率。

3、概率的性质和运算

（1）任何随机事件的概率P(A)，其值介于

$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ 之间。

（2）条件概率：

$P(A|B)$ 为事件B已出现的条件下，事件A发生的概率。

性质：①若B与A无关：$P(A|B)=P(A)$，

则A必与B无关：$P(B|A)=P(B)$。

②一般情况下$P(A|B) \neq P(B|A)$，其中一个为前向概率，另一个则称它为后验概率。

（3）两事件之积的概率**$P(AB)$** 叫联合概率，它代表 A和B同时出现的概率，故 $P(AB)=P(BA)$。

因为：$\boldsymbol{P(AB)= P(A)\,P(B|A)}$

$\boldsymbol{P(BA)=P(B)\,P(A|B)}$

于是：$\boldsymbol{P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)}$

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

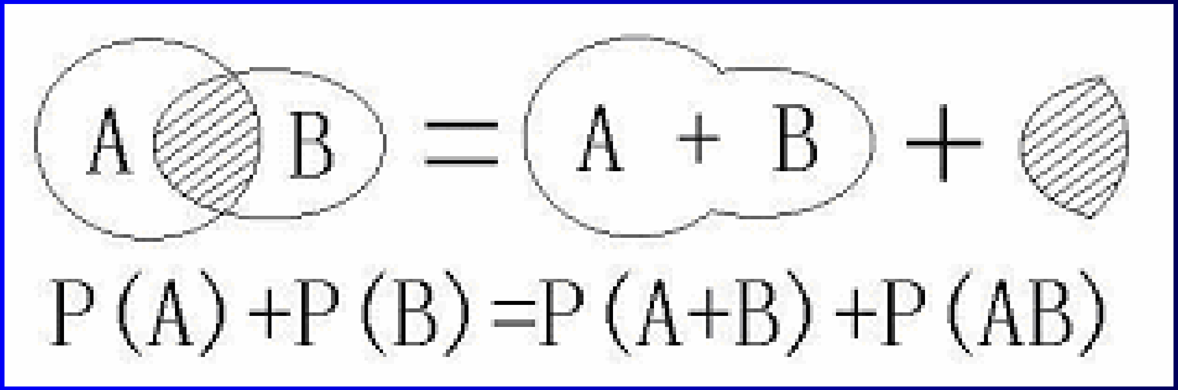
特例：①当$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$无关时，便有$\boldsymbol{P(AB)= P(A)\cdot P(B)}$

②当$\boldsymbol{P(AB)=0}$时，称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$互斥。

（4）两事件之和的概率 ***P(A+B)*** 代表**A**或**B**出现的概率（二者之一或共同），显然：

$$P(A+B)= P(A)+ P(B) - P(AB)$$

关系如图所示：



特例：**A**与**B**互斥，**P(AB)=0**，**P(A+B)=P(A)+P(B)**。

（5）可能的事件全体A_i（$i=1,\ldots\ldots n$），若为互斥、完备集合，则有归一化公式：$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

同样，对条件概率有：$\sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B) = 1$

对联合概率有：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(A_i B_j) = 1$

$$\sum_{j=1}^{m} P(A_i B_j) = P(A_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} P(A_i B_j) = P(B_j)$$

（6）贝叶斯（Bayes）公式

将：$$P(B_j)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB_j)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B_j\mid A_i)$$

代入：$$P(A_i|B_j)=\frac{P(A_i)P(B_j|A_i)}{P(B_j)}$$

得到：$$P(A_i\mid B_j)=\frac{P(A_i)P(B_j\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B_j\mid A_i)}$$

（$i=1$，$2\ldots\ldots n$）

[例1] A_0和A_1表示信源发“0”发“1”两事件， B_0和B_1表示信宿收“0”收“1”两事件。已知：$P(A_0)=2/3$，$P(B_1|A_0)=1/6$，$P(B_0|A_1)=1/4$，

求：(1)收到“1”和收到“0”的概率； (2)误码率； (3)后验概率；

解：（1）由归一化条件得到：

$$P(A_1)=1/3，P(B_0|A_0)=5/6， P(B_1|A_1)=3/4，$$

求出4个联合概率为：

$P(A_0B_0)=P(A_0)P(B_0|A_0)=5/9$ ，为发0收0概率

$P(A_1B_0)=P(A_1)P(B_0|A_1)=1/12$，为发1收0概率

$P(A_0B_1)=P(A_0)P(B_1|A_0)=1/9$ ，为发0收1概率

$P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)=1/4$ ，为发1收1概率

于是，收到0的概率为： $P(B_0) = P(A_0 B_0) + P(A_1 B_0) = 23/36$；

收到1的概率为： $P(B_1) = P(A_0 B_1) + P(A_1 B_1) = 13/36$；

（2）误码率为：

$$Pe = P(A_1 B_0) + P(A_0 B_1) = 7/36;$$

（3）后验概率：

在已收到0的条件下，判断它的各种可能来源：

来自A_0的概率为：$P(A_0|B_0)= P(A_0 B_0)/ P(B_0)=20/23$；

来自A_1的概率为：$P(A_1|B_0)= P(A_1 B_0) / P(B_0)=3/23$；

同理在收到1的条件下，判断它的各种可能来源：

来自A_0的概率为：$P(A_0|B_1)= P(A_0 B_1)/ P(B_1)=4/13$；

来自A_1的概率为：$P(A_1|B_1)= P(A_1 B_1) / P(B_1)=9/13$；

- 通信中，由于存在误码，接收端只能知道收到的是什么符号，并不能百分之百肯定信源发的是什么符号。必须根据信源和信道的统计性质计算出后验概率，为译码器制订出译码规则。

- 本例中，在已收到0的条件下，来自信源发0的可能性是20/23，来自信源发1的可能性是3/23，因此应当翻译为0；然而这样的译码，尚有3/23的概率发生将会错误翻译。

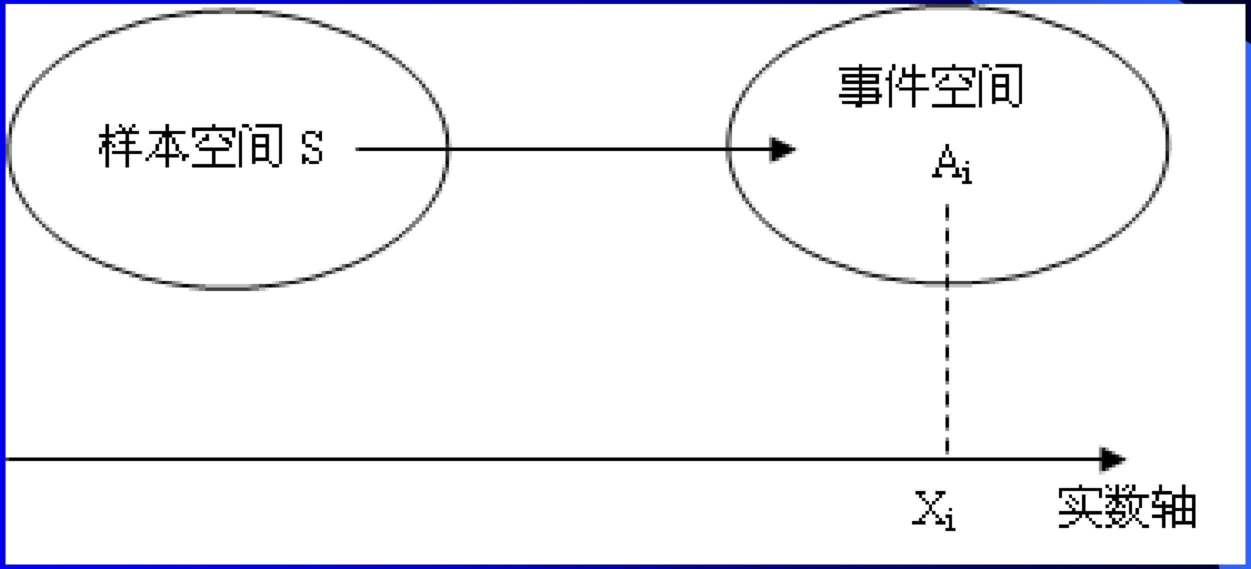
同理，在已收到1的条件下，来自信源发1的可能性是9/13，来自信源发0的可能性是4/13，因此应当翻译为1；然而这样的译码，也有4/13的概率会发生错误的翻译。

二、随机变量 (*Random variable*)

1、引入：

关于概率的定义，只能用于离散的、少量的随机事件。当事件数目很多，甚至连续分布时应引入更有效的数学描述。

2、随机变量：



将随机事件A_i与数轴上的一点X_i建立起了某种映射。

引入随机变量：

第一．把随机事件与一个实数X建立起一一对应关系，就可以用处理实数的各种数学方法来处理随机事件了。

第二．这个实数X是样本的实函数，样本的随机性质决定了这个变数的随机性，因此它被称为随机变量。

第三．当X取离散值，则为离散随机变量；

当X取连续值，则为连续随机变量。

第四．引入随机变量就可以对离散和连续的随机现象有统一数学处理方法。

三、概率分布函数（*probability distribution function*）

1、定义：

$F(x) = P\{X \leqslant x\}$ 代表随机变量X取值小于等于某指定值 x 的概率。

注意：$F(x)$不是取某一值 x 的概率，而是样本的结果出现在 $-\infty < X \leqslant x$ 范围的概率。

x 可指定任何值$-\infty < x < +\infty$。

2、性质：

（1）$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，且

$$F(-\infty) = P\{X \leqslant -\infty\} = 0$$

$$F(+\infty) = P\{X \leqslant +\infty\} = 1$$

（2）随着x的增大，$F(x)$是一个积累的效果，只会增大不会减小，对任意实数 x_1 和x_2 只要$x_2 \geqslant x_1$，总有：

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) \geqslant 0$$

四、概率密度函数（<u>*probability density function*</u>）

1、定义：

随机变量的概率密度函数

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

于是概率分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

性质：

（1）$f(x) \geqslant 0$ （$-\infty < x < +\infty$）

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) = 1$ 归一性

（3）$P\{x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) == \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

（4）可借用冲激函数 $\delta(x)$ 表示离散随机变量的概率密度：$f(x) = \sum_i F(x = x_i) \cdot \delta(x - x_i)$

[例2] 已知概率密度函数 $f(x)=Ae^{-2x}\varepsilon(x)$

求概率分布函数$F(x)$。

解：由归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-2x}\varepsilon(x)dx=\int_{0}^{\infty} Ae^{-2x}dx=\frac{A}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{A}{2}=1$$

解得A=2；所以 $f(x)=2e^{-2x}\varepsilon(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{x} 2e^{-2\xi}\varepsilon(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{0}^{x} 2e^{-2\xi}d\xi\ \varepsilon(x)=(1-e^{-2x})\varepsilon(x)$$

五、统计平均（*statistic average*）

我们说随机现象遵循统计规律，更直观的表现在取值不确定的随机事件却具有确定的统计平均结果。

1、随机变量的平均值（数学期望值）

$$\overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

性质：设c为常数，则：　E[c]= c；

E[c X]= c E[X]；E[X+Y]=E[X]+E[Y]；

$$E[y(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \cdot f(x) dx$$

2、随机变量的平方平均值 （<u>***mean-square value***</u>）

$$\overline{X^2} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

3、方差

$$\sigma^2 = D[X] = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{X})^2 f(x)dx$$

$$\sigma^2 = E[(X - \overline{X})^2] = E[X^2 - 2\overline{X}X + \overline{X}^2]$$

$$= \overline{X^2} - 2\overline{X} \cdot \overline{X} + \overline{X}^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

性质： c为常数， ***D***[c]=***0*** ；

D[c ***X***]= c **2** ***D***[***X***] ；

D[***X***+***Y***]=***D***[***X***]+***D***[***Y***] (***X***、***Y***相互独立)。

[例3] 计算均匀分布的随机变量的均值和方差。

解：设概率密度 **$f(x)=A$**，由总概率 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$，

概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} A & ,x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & , \quad 其它 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_2 - x_1} & ,x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & , \quad 其它 \end{cases}$

均值为 $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \dfrac{1}{x_2 - x_1} dx = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$

方均值为 $E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \dfrac{1}{x_2 - x_1} dx = \dfrac{x_2^3 - x_1^3}{3(x_2 - x_1)} = \dfrac{1}{3}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$

方差为 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{1}{12}(x_2 - x_1)^2$

注意：

1、大写$F(x)$表示概率分布函数，小写$f(x)$表示概率密度函数。

2、大写X、Y表示随机变量，小写x、y是指定的界值。鉴于概率密度函数$f(x)$表示（x，$x + dx$）范围的概率，因此可以认为x代表样本值。

3、 $F_S(x)$， $f_S(x)$中脚标S表示区别是哪个随机变量的概率分布（或密度）函数。问题中只有一个随机变量时，可以不写脚标。

2.2　随机过程及其数学描述（random processes）

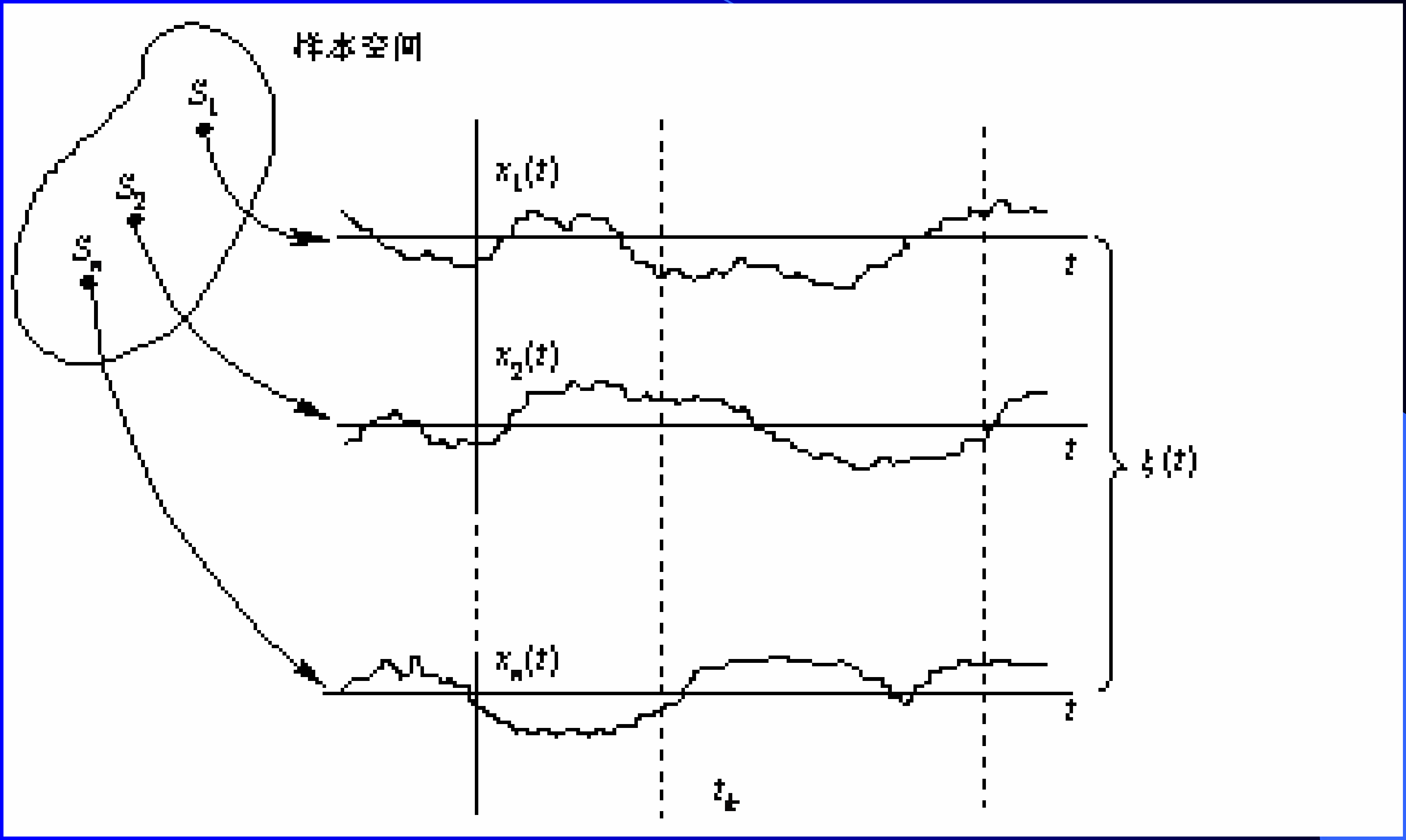
一、随机过程：

随机事件往往发生于时间的持续过程中。

设对N台性能完全相同、工作条件完全一致的接收机输出端记录其噪声电压 的波形，会发现，任何一台的记录波形都不相同。接收到的噪声电压随时间的变化完全是随机的。

不能用一个或几个时间的确定函数来表达的过程叫做随机过程。

N台接收机记录其噪声电压的波形：



可以从纵向和横向两个方面来考察同一个随机过程：

1、**样本函数**——就随机过程的某一次发生(测试、实现)，纵向记录它随时间的变化，便得到一个样本函数$\boldsymbol{x_s(t)}$。

2、**随机变量**——就随机过程的任意指定时刻，横向记录它各个样本的取值，全体样值的集合构成一个随机变量 $\xi_i=\{x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i),\ldots\ldots\}$。

3、**随机过程是样本和时间的双重随机函数**。

$$\xi(t)=\{x_1(t),x_2(t),\cdots x_N(t)\}$$

二、一维概率分布函数和概率密度函数

1、定义：即指定时刻t_1和实数x_1 。

一维概率分布函数

$$F_1(x_1, t_1) = P\{ \xi(t_1) \le x_1 \}$$

一维概率密度函数 $f_1(x_1,t_1) = \dfrac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1}$

2、统计平均值：

数学期望值：即随机变量的统计平均值

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x,t)\, dx = a(t)$$

平方平均值：

$$E[\xi^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x,t)\,dx = \overline{x^2(t)}$$

方差：

$$D[\xi(t)] = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - a(t)]^2 f_1(x,t)\,dx = \sigma^2(t)$$

显然：

$$\sigma^2(t) = \overline{x^2(t)} - a^2(t)$$

3、一维平稳（first-order stationary random process）

（1）定义：如果一维概率密度函数与时间无关，

$$f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1,t_1+\tau)=f_1(x_1)$$

则称该随机过程是一维平稳随机过程。

（2）特点：数学期望值、方差和均方值都是常数。

$$E[\xi(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x,t)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)\,dx=a$$

$$E[\xi^2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x,t)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x)dx=\overline{x^2}$$

$$D[\xi(t)]=E[(X(t)-a)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x)dx-a^2=\sigma^2$$

显然： $\sigma^2=\overline{x^2}-a^2$

三、二维概率分布函数和概率密度函数

1、定义：任意指定两个时刻t_1和t_2和两个实数x_1和x_2，则二维概率分布函数为：

$$F_2(x_1,x_2\,;\,t_1,t_2)=P\{\xi(t_1)\le x_1\,,\xi(t_2)\le x_2\}$$

二维概率密度函数为：

$$f_2(x_1,x_2\,;\,t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_2(x_1,x_2\,;\,t_1\,,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

2、两变量的统计平均（两变量间相关情况）

（1）自相关函数 （**autocorrelation function**）

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2f_2(x_1,x_2\;;\;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

或：$\boldsymbol{R(t_1, t_2) = R(t_1, t_1+\tau)}$。

式中： $\tau = t_2 - t_1$,

相关函数与时间起点t_1和时间间隔 τ 都有关。

（2）自协方差函数 （**autocovariance function**）

$$B(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)-a(t_1)][\xi(t_2)-a(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x_1-a(t_1)]\cdot[x_2-a(t_2)]\cdot f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

① 相关函数和协方差函数体现了随机过程的二维统计特性。

② 两者关系

$$B(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-E[\xi(t_1)]\cdot[\xi(t_2)]$$

$$=R(t_1,t_2)-a(t_1)\cdot a(t_2)$$

3、二维平稳

(second-order stationary random process)

（1）定义：如果二维概率密度函数只与t_1和t_2的时间差有关，

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;t_1,t_1+\tau)$$
$$=f_2(x_1,x_2;\tau)$$

则称该随机过程是二维平稳随机过程。

（2）特点：相关函数和协方差函数与时间起点无关，只与时间间隔有关。

$$R(t_1,t_2)=R(t_2-t_1)=R(\tau)$$

$$B(t_1,t_2)=B(t_2-t_1)=B(\tau)$$

四、狭义平稳(严平稳)和广义平稳(宽平稳)

1、狭义平稳要求严格平稳，即要求n维概率密度函数不随时间的推移而改变。

$$f_n(x_1,x_2,\cdots;x_n;t_1,t_2,\cdots;t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots;x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots;t_n+\tau)$$

2、实际中，一般只要求一阶平稳和二阶平稳就够了，称为广义平稳。这时：

（a）随机变量的平均值与时间无关：

$$E[\xi(t)]=a \qquad D[\xi(t)]=\sigma^2$$

（b）自相关函数只与时间差有关，与绝对时间无关：

$$R(t_1,t_2)=R(\tau)$$

要证明随机过程是否广义平稳只须证明：

a、一维：随机变量的数学期望与时间无关 。

$$E[\xi(t)] = a$$

b、二维：随机变量的相关函数只与时间间隔有关，与绝对时间无关。

$$R(t_1, t_2) = R(\tau)$$

狭义平稳随机过程一定是广义平稳随机过程，反之则不一定。

特例：一个宽平稳的高斯过程（正态随机过程）也是严平稳的随机过程。

五、随机过程的时间平均与遍历性（各态历经性）

1、时间平均值：

设随机过程 $\xi(t)$ 的某一次试验样本函数为 $x(t)$，对其长时间的观测值取时间平均值。

$$< \xi(t) >= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \overline{x(t)}$$

$$< \xi(t)\xi(t+\tau) >= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

2、遍历性（各态历经性）：（**ergodic**）

如果一个平稳随机过程的时间平均效果与样本的统计平均效果相同，则它被称之为各态历经性的随机过程。

特点：时间平均值等于统计平均值，并且一阶平均值为常数，二阶平均值只决定于时间差：

$$<\xi(t)>=E[\xi(t)]=a$$

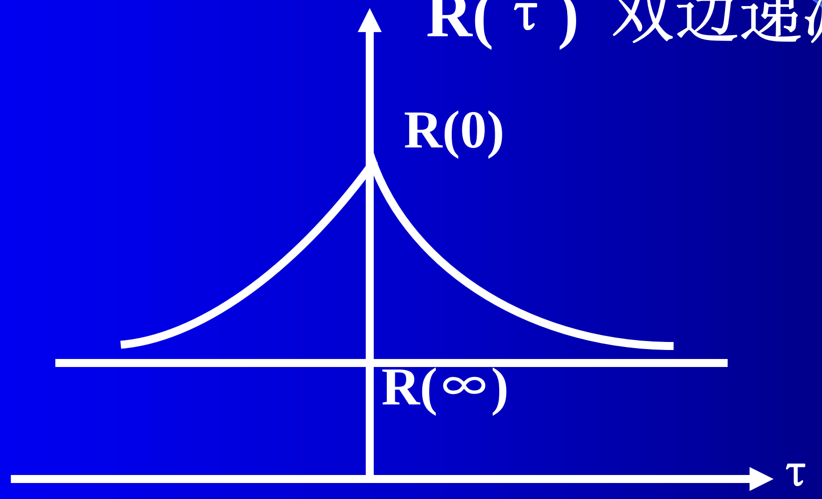
$$<\xi(t_1)\,\xi(t_2)>=E[\xi(t_1)\,\xi(t_2)]=R(\tau)$$

- 遍历性（各态历经性）可理解为，平稳随机过程的任一样本函数在随时间演化的过程中都经历了随机过程的所有样本可能出现的状态，故任一试验样本函数的长时间平均等价于大量样本的统计平均。

- 只有平稳随机过程才有各态历经性，但不是所有平稳随机过程都平稳。

- 通信系统原理中碰到的随机信号和噪声均都可以认为是具有各态历经性的广义平稳随机过程，因此统计平均值和相关函数有确定的意义。

六、（平稳、遍历的随机过程的）相关函数的性质：



1、偶函数性　　$R(\tau)=R(-\tau)$

2、极值性　　$R(\tau)\leqslant R(0)$，上界为$R(0)$

通信中信号总被当作平稳随机过程来处理，

这时自相关函数有明确的物理意义：

3、平均功率 $S = R(0)=E[\xi^2(t)]= \overline{x^2}$

4、直流功率 $S_0 = R(\infty)= a^2$

$$R(\infty)=\lim_{\tau\to\infty}R(\tau)=\lim_{\tau\to\infty}E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$$

$$=E[\xi(t)]\cdot \mathrm{E}[\xi(t+\tau)]=a^2$$

5、交流功率 $S_{\sim} =S - S_0$

$$D[\xi(t)]=\sigma^2=E[\xi^2(t)]-\{E[\xi(t)]\}^2$$

$$=\overline{x^2}-a^2=R(0)-R(\infty)$$

§ 2.3 随机信号的功率谱密度

1、能量信号与功率信号

（1）能量信号:

能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt$ 为有限值的信号叫能量信号。显然能量信号对无穷长时间的平均功率为零。

（2） 功率信号:

平均功率为有限值的信号叫功率信号。周期信号及常见随机信号均为功率信号。功率等于能量除以时间，既然能量为无穷大，如何计算功率?

为计算功率，只好先将信号做“截短”处理：

$$f_T(t)=\begin{cases} f(t) & 当\,|\,\mathrm{t}\,|\le \dfrac{\mathrm{T}}{2} \\ 0 & 当\,|\,\mathrm{t}\,|> \dfrac{\mathrm{T}}{2} \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{f_T(t)}$是$f\,(\boldsymbol{t})$ 的截短函数；

在有限的时间段内先计算出能量和平均功率后，再令时间趋于无穷大，得到功率的定义：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|\,f_T(t)\,|^2\;dt$$

2、能量谱密度和功率谱密度：

（1）能量谱（对能量信号）：

时域—— $E=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt$

频域—— 将傅立叶变换：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

代入上式得：

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} | f(t) |^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot f^*(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot [\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega]^* dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega) \cdot [\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt \,] \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega) \cdot F(j\omega) \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} | F(j\omega) |^2 \, d\omega$$

令 **$G(\omega)=|F(j\omega)|^2$**，叫能量谱密度。

则 $$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\,d\omega$$

——————帕塞瓦尔定理

式中： $$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

是 ***f*** **(t)**所对应的频谱函数。

（2）功率谱（对功率信号）

同理，通过傅立叶变换得到平均功率为：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f_T(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}d\omega$$

令 $P_S(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{|F_T(j\omega)|^2}{T}$，叫功率谱密度。

则：$P=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}P_S(\omega)\,d\omega$ ———— 雷利定理

（3）相关定理（维纳·辛钦关系）

根据确知信号功率谱的定义，随机信号仍应有同样的推导过程，不同之处仅在于多求一次统计平均。因此随机过程 $\xi(t)$的功率谱密度：

$$P_{\xi}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{E|F_T(j\omega)|^2}{T}$$

随机过程 $\xi(t)$的平均功率为：

$$S=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P_{\xi}(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{E|F_T(j\omega)|^2}{T}\,d\omega$$

$$E[|F_T(j\omega)|^2] = E[\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t_1)e^{j\omega t_1}\,dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t_2)e^{-j\omega t_2}\,dt_2]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[f_T(t_1)f_T(t_2)]\,e^{-j\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2$$

令$t_2 - t_1 = \tau$, $t_1 = t$, 则 $dt_1 = dt$, $dt_2 = d\tau$

$$E[|F_T(j\omega)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[f_T(t)f_T(t+\tau)]\,e^{-j\omega\tau}\,dt\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}d\tau \int_{-T/2}^{T/2} R(t,t+\tau)\quad dt$$

其中 $E[f_T(t)f_T(t+\tau)] = \begin{cases} R(t,t+\tau) & |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$

得到：

$$P_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}d\tau\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R(t,t+\tau)\quad dt$$

对平稳、遍历随机过程

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R(t,t+\tau)\,dt=\overline{R(t,t+\tau)}=R(\tau)$$

所以 $$P_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau$$

结论：功率谱密度$P_\xi(\omega)$与相关函数$\boldsymbol{R}(\tau)$互为傅立叶变换关系：

$$R(\tau) \leftrightarrow P_\xi(\omega)$$

$$P_\xi(\omega) = \mathscr{F}[R(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \mathscr{F}^{-1}[P_\xi(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_\xi(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega$$

称之为相关定理（维纳·辛钦关系）。

§2.4　高斯随机过程（正态随机过程）（Gaussian Random Process）

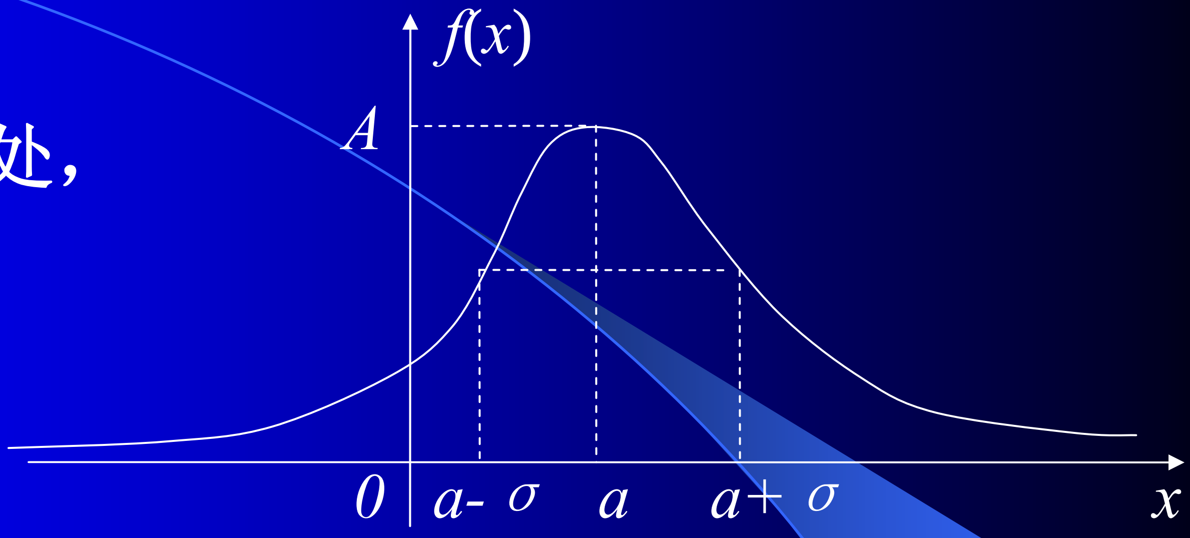
一、高斯型随机变量（*Gaussian*）：

它的一维概率密度函数服从高斯分布(即正态分布)，可用数学表达式表示成

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

式中：**a**为均值，σ² 为方差（均为常数）

它有以下特点：



1、最大值位于**x=a**处，

且左右对称。

a代表平均值。

2、最大值为 $A = f(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

$x = a \pm \sigma$ 时，$f(x) = Ae^{-\frac{1}{2}} = 0.607A$。

3、曲线呈钟形，峰的宽窄取决于σ：

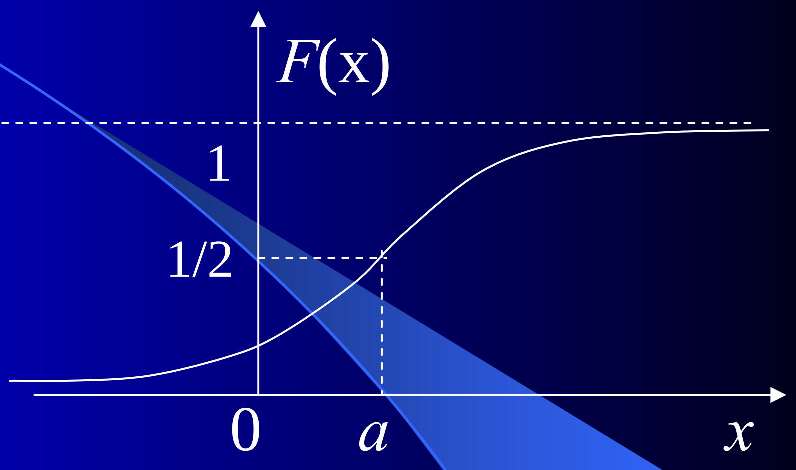
σ越大，曲线下降越慢，峰越宽；

σ越小，曲线下降越快，峰越窄。

4、概率分布函数无解析解，叫正态分布曲线。

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}]dy$$



概率积分函数定义为：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy$$

数学手册上有表可查。查表时，令: $x'=\dfrac{x-a}{\sigma}$

$$F(x)=\phi(x')=\phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

5、*Q*函数和误差函数*erf*(*x*)：

定义*Q*函数：

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-z^2/2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2/2}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-z^2/2}dz$$

前项： $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2/2}dz=Q(0)=\frac{1}{2}$$

后项中，令 $\frac{z^2}{2}=y^2$，则 $z=\sqrt{2}y$，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-z^2/2}dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{2}}e^{-y^2}dy$$

定义误差函数为： $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$

补误差函数：$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-y^2} dy$

则**Q**函数：$Q(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} erf(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} erfc(\frac{x}{\sqrt{2}})$

概率积分函数：$\Phi(x) = 1 - Q(x)$

正态分布函数：$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

二、信道的加性噪声（**Additive noise**）

（一）噪声的分类

1、按<u>噪声混入信号的方式</u>分：

(1)乘性噪声：噪声与信号同生同灭，以相乘方式混合于信号中。

(2)加性噪声：噪声独立于信号，始终存在，以相迭加的方式混入信号中。

2、根据<u>噪声的来源</u>进行分类，一般可以分为三类:

(1) 人为噪声。

人为噪声是指人类活动所产生的对通信造成干扰的各种噪声。其中包括工业噪声和无线电噪声。

(2) 自然噪声。

自然噪声是指自然界存在的各种电磁波源所产生的噪声。

(3) 内部噪声。

内部噪声是指通信设备本身产生的各种噪声。包括热噪声和散弹噪声。

3、如果根据噪声的性质分类，噪声可以分为单频噪声、脉冲噪声和起伏噪声。这三种噪声都是随机噪声。

(1) 单频噪声。

单频噪声主要是无线电干扰。

(2) 脉冲噪声。

脉冲噪声是在时间上无规则的突发脉冲波形。

(3) 起伏噪声。

起伏噪声是一种连续波随机噪声，包括热噪声、散弹噪声和宇宙噪声。起伏噪声的特点是具有很宽的频带，并且始终存在，

（二）起伏噪声及特性

1、热噪声：热噪声是由传导媒质中电子的随机运动(布朗运动)而产生的，功率谱密度可表示为

$$P_n(f)=2RKT\ (w/Hz)$$

式中： T为所测电阻的绝对温度，

$K=1.38054\times 10^{-23}$ (J/K)为玻耳兹曼常数。

2、散弹噪声：是由电子管和晶体管器件电子发射不均匀所产生的电流的起伏。

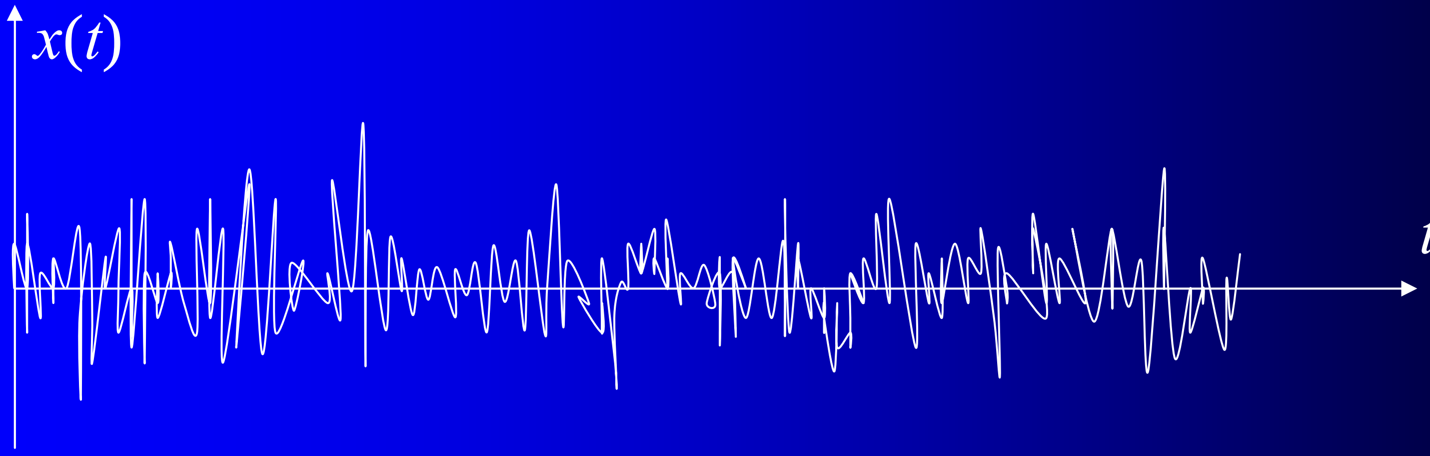
3、宇宙噪声：宇宙噪声指来自太阳、银河系及银河系外的天体辐射波的噪声。

4、起伏噪声特性

（1)功率谱密度在很宽的频带范围都是常数。

（2)由大量互相独立的任意分布的随机杂波迭加而成。

（3)平均直流分量为零。



三、高斯白噪声（White Gaussian Noise）

高斯白噪声是用来描述广泛存在于信道中的起伏噪声的数学模型。它有以下特性：

1、高斯白噪声是一种广义平稳、遍历的随机过程。

（1）随样本不可预测，随时间无序变化。

（2）平均值＝常数（零），与时间无关，相关函数只取决于时间间隔 $\tau = t_2 - t_1$。

（3）长时间的平均＝大量样本的统计平均。

2、概率密度函数是均值为零的高斯型函数。

均值$a=0$，概率密度函数:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

3、功率谱密度呈均匀分布。

前者指不同幅度样本出现的概率分布，后者指不同频率分量的能量分布，概念不同。在很宽的频率范围内为常数，类似于白色光，由各种不同频率的色光均匀分布构成。

功率谱密度通常被写成：

$$P_n(\omega) = \frac{n_0}{2} \quad (W/Hz) \text{（双边谱）} \quad (-\infty < \omega < +\infty)$$

若采用单边频谱，白噪声的功率谱密度函数又常写成：

$$P_n(\omega) = n_0 \quad (W/Hz) \quad \text{(单边谱)} \quad (0 < \omega < +\infty)$$

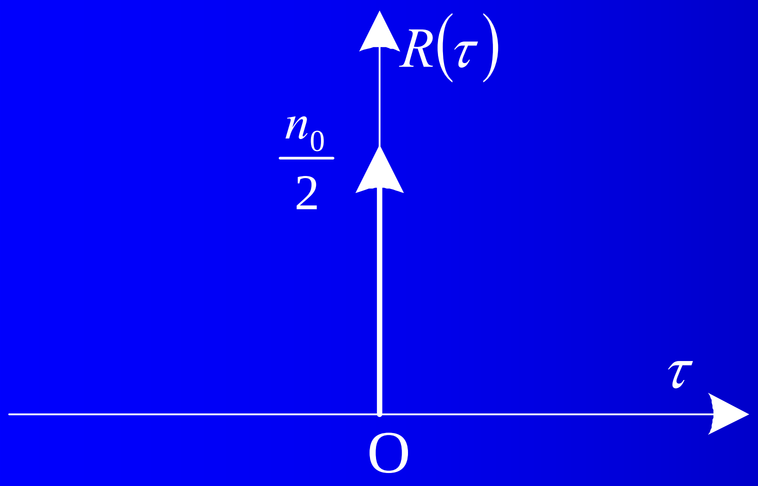
$\boldsymbol{n_0}$为常数，单位为瓦特 / 赫兹。

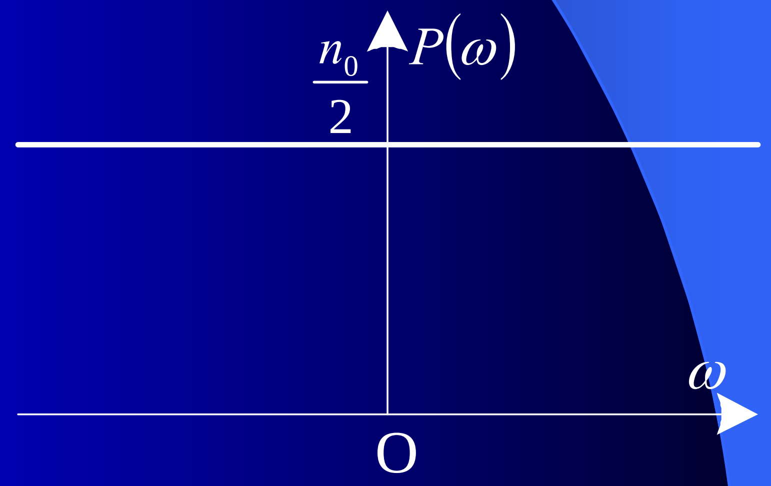
(W / HZ = watts per Hertz)

4、自相关函数：

$$R_n(\tau) = \mathscr{F}^{-1}[P_n(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{n_0}{2}\delta(\tau) = \begin{cases} \neq 0\,,\ \tau = 0\text{时} \\ = 0\text{，}\quad\text{其它} \end{cases}$$





§2.5 随机过程通过线性系统
(Transmission of a Random Process Through a Linear Time-Invariant Filter)

- 通信系统处理的信号都是随机信号。原则上，随机信号与确知信号在通过线性时不变系统时，处理方法是一样的（时域卷积和频域系统函数方法）。
- 然而却因为随机信号无确定的时域表达式，也无法得到的确定的频谱密度，使计算遇到了困难。
- 通信中的随机信号是被作为平稳遍历的随机过程对待的。作为平稳遍历的随机过程，其统计平均的结果是明确的，是可观测量。因此应当将统计方法与线性时不变系统的方法结合使用。

一、输出随机信号的平均值：时域一阶统计

设：**X(t)**为输入平稳随机过程，**x(t)**是它的一个样本。

$Y(t)$ 为输出随机过程，$y(t)$ 是它的一个样本。

对每个样本总有：

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)x(t-u)du$$

则输出随机过程：

$$Y(t)=h(t)*X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)X(t-u)du$$

输出随机过程的数学期望值：

$$\overline{Y(t)}=E[Y(t)]=E[\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)X(t-u)du]=\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t-u)]\cdot h(u)du$$

对平稳随机过程 $E[X(t-u)] = E[X(t)] = \overline{X}$

又因为 $H(\omega) = \mathscr{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$

所以 $H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, du$

得到 $\boxed{\overline{Y(t)} = \overline{X} \cdot H(0)}$

结论：平稳随机过程通过线性系统后，输出随机过程的平均值等于输入随机过程的平均值乘以系统直流传递函数（直流放大倍数 / 增益）。

二、输出随机信号的自相关函数：时域二阶统计

$$R_Y(t,t+\tau)=E[Y(t)\cdot Y(t+\tau)]$$

$$=E[\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)X(t-u)\,du\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}h(v)X(t+\tau-v)\,dv]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t-u)\cdot X(t+\tau-v)]h(u)h(v)\,dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+u-v)\;h(u)h(v)\,dudv$$

令 $\lambda = v-u\,,\, dv = d\lambda\,,$

$$R_Y(t,t+\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)h(u+\lambda)\,du\,d\lambda$$

令： $R_h(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h(u+\lambda)\,du$

叫做冲击响应的自相关函数，则：

$$R_Y(t,t+\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-\lambda)\cdot R_h(\lambda)\,d\lambda$$

$$=R_h(\tau)*R_X(\tau)\equiv R_Y(\tau)$$

只取决与时间差，与绝对时间无关。

还可以推导出，冲击响应的自相关函数：

$$R_h(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(u+\lambda)du=\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi-\lambda)h(\xi)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)h(-(\lambda-\xi))d\xi=h(\lambda)*h(-\lambda)$$

结论：定义冲击响应的自相关函数$R_h(\lambda)=h(\lambda)*h(-\lambda)$，则输出随机信号的自相关函数＝冲击响应的自相关函数与输入随机过程的自相关函数的卷积：

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)*R_h(\tau)$$

三、输出随机信号的平均功率：

$$R_Y(\tau=0)=E[Y(t)\cdot Y(t+0)]=E[Y^2(t)]=\overline{Y^2}$$

结论：输出随机过程的自相关函数在零点的值就是平均功率，也就是输出的方均值。

四、输出随机信号的功率谱密度：频域二阶统计

输出随机过程的自相关函数 $R_Y(\tau)=R_h(\tau)*R_X(\tau)$

输出随机过程的功率谱密度 $P_Y(\omega)=\mathscr{F}\,[R_Y(\tau)]$

输入随机过程的功率谱密度 $P_X(\omega)=\mathscr{F}\,[R_X(\tau)]$

系统自相关函数的傅立叶变换是系统功率传输函数：

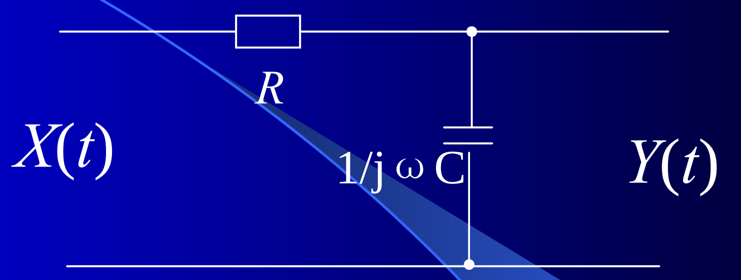
$$F[R_h(\lambda)]=\mathscr{F}[h(\tau)*h(-\tau)]=H(\omega)\cdot H^*(\omega)=|H(\omega)|^2$$

故得到

$$\boxed{P_Y(\omega)=|H(\omega)|^2 P_X(\omega)}$$

结论：输出随机过程之功率谱密度等于输入随机过程的功率谱密度与系统传输函数模平方之积。

[例1]求高斯白噪声通过RC低通滤波器后的直流分量和平均功率。



解：由交流等效电路

直接得到系统函数：

$$H(\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{j\omega RC+1}=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}$$

式中 $\alpha=\dfrac{1}{RC}$

直流分量：因为 $\overline{X}=0$ 所以 $\overline{Y(t)}=\overline{X}\cdot H(0)=0$

计算平均功率，先计算输出信号功率谱密度：

$$\left|H(\omega)\right|^2=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$P_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 P_X(\omega) = \frac{n_0}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(\omega) d\omega = \frac{n_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega =$$

$$= \frac{n_0 \alpha^2}{4\pi} \left[\frac{1}{\alpha} arctg \frac{\omega}{\alpha} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{n_0 \alpha}{4} = \frac{n_0}{4RC}$$

或者计算输出信号的自相关函数:

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_Y(\omega)] = \frac{n_0 \alpha}{4} F^{-1}\left[\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right] = \frac{n_0 \alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|}$$

$$\overline{Y^2} = R_Y(0) = \frac{n_0 \alpha}{4} = \frac{n_0}{4RC}$$

[例2]求高斯白噪声通过调制器后的功率谱密度。

解：调制后，输出信号$Y(t)=X(t)\cos\ \omega_0 t$

$$R_Y(t,t+\tau)=E\left[X(t)\cos\omega_0 t\cdot X(t+\tau)\cos\omega_0(t+\tau)\right]$$

$$=E\left[X(t)X(t+\tau)\right]\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)$$

$$=R_X(t,t+\tau)\cdot\tfrac{1}{2}[\cos\omega_0\tau+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)]$$

对于平稳遍历随机过程，应当与时间的起点无关，因此：

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)\cdot\tfrac{1}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$P_Y(\omega)=\mathscr{F}\left[R_Y(\tau)\right]=F\left[\tfrac{1}{2}R_X(\tau)\cos\omega_0\tau\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\{P_X(\omega)*\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\}$$

$$=\frac{1}{4}\{P_X(\omega+\omega_0)+P_X(\omega-\omega_0)]=\frac{1}{4}[\frac{n_0}{2}+\frac{n_0}{2}]=\frac{n_0}{4}$$

五、高斯限带噪声

1、低通高斯噪声（带限白噪声）

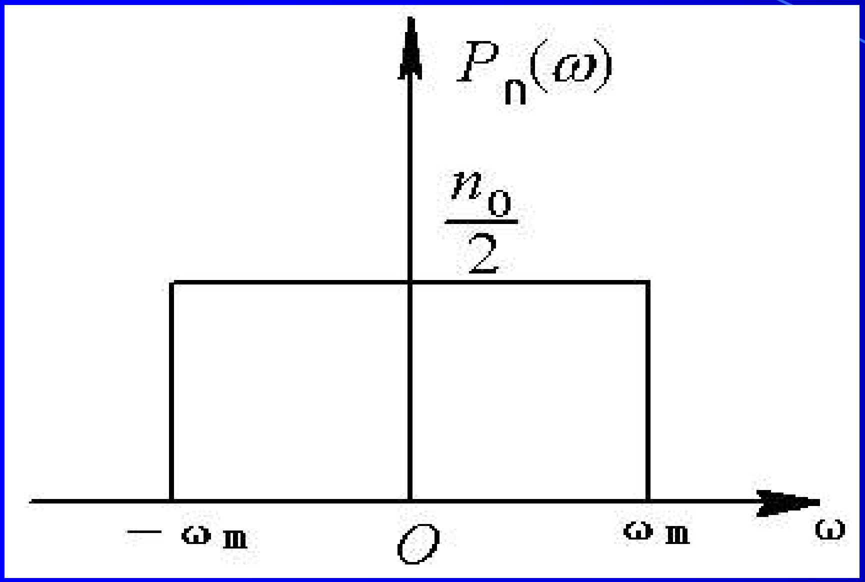
理想LPF传输函数 $H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_m \\ 0 & |\omega|>\omega_m\end{cases}$

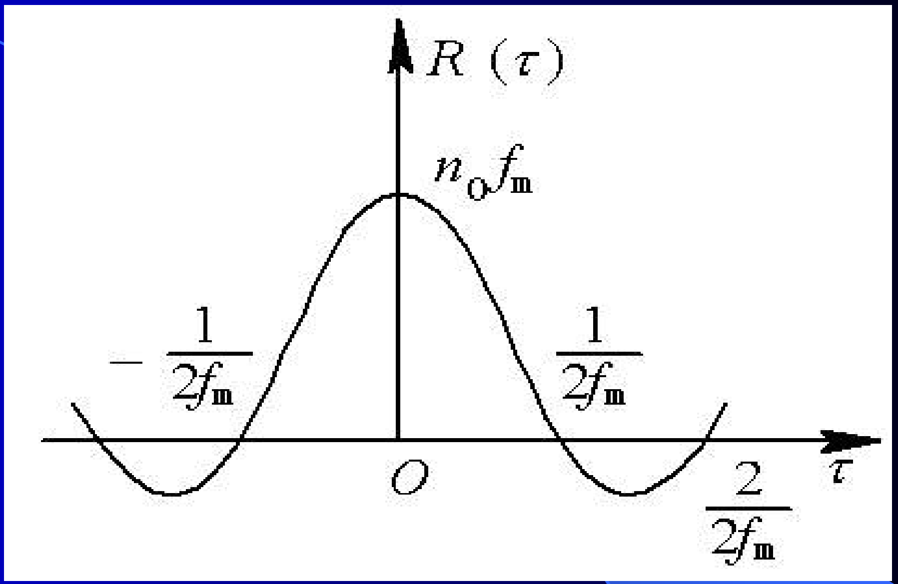
高斯白噪声通过理想低通滤波器后功率谱密度：

$$P_n(\omega)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}, & |\omega|\le\omega_m \\ 0, & |\omega|>\omega_m\end{cases}$$

高斯白噪声通过理想**LPF**后相关函数

$$R(\tau)=\mathscr{F}^{-1}[P_n(\omega)]=\frac{n_0\omega_m}{2\pi}Sa(\omega_m\tau)$$



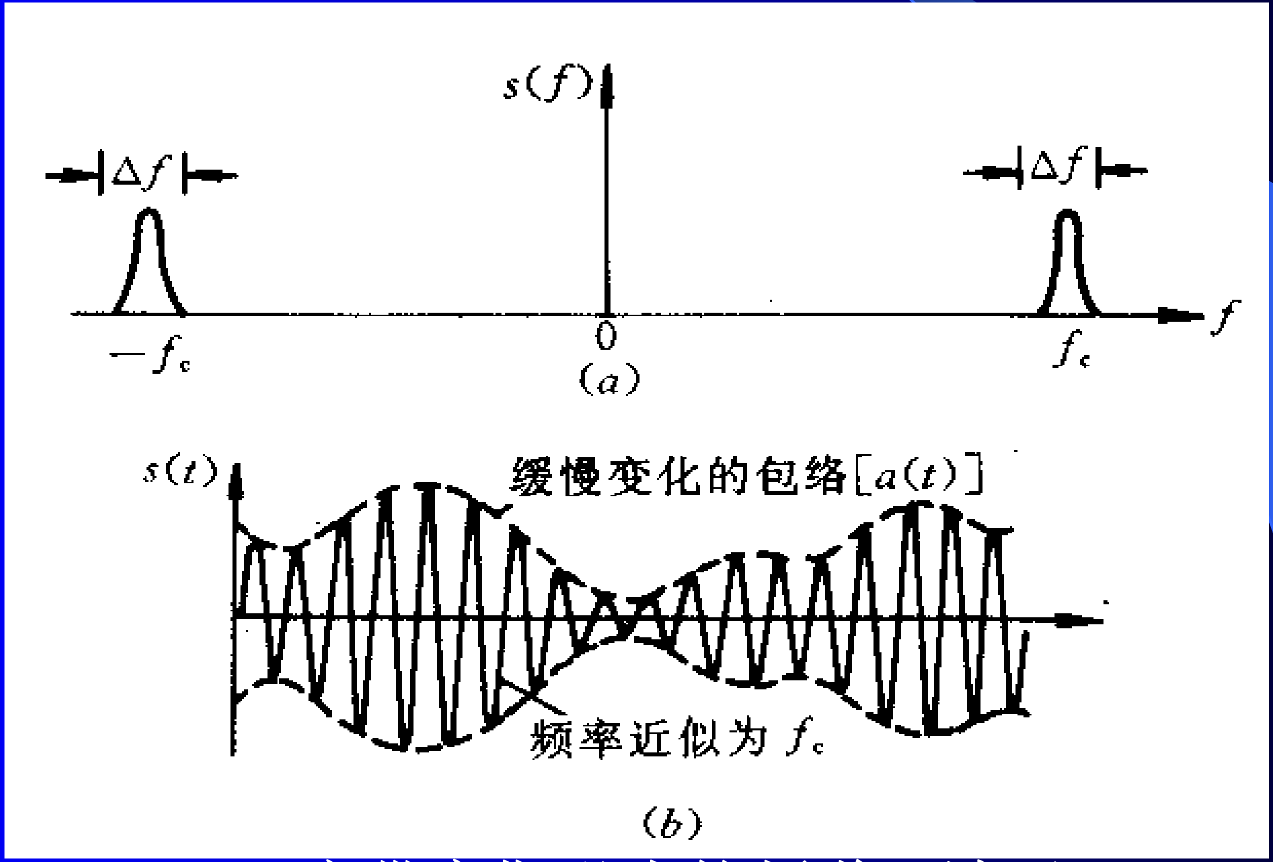


高斯白噪声通过截频为**ω_m**的理想**LPF**，平均功率为：

$$R(0) = \frac{n_0 \omega_m}{2\pi} = n_0 f_m$$

2、窄带高斯噪声（带通白噪声）

当高斯噪声通过以 ω_c 为中心角频率的窄带系统（ $\Delta f << f_c$, $f_c >> 0$ ）时，输出就为窄带高斯噪声。



窄带高斯噪声的频谱及波形

噪声$\boldsymbol{n(t)}$为随机过程：$\boldsymbol{A(t)}$为随机幅度,

$\varphi(t)$为随机相位, 近似认为窄带内频率均为ω c

则窄带高斯噪声可表示为:

$$n(t) = A(t)\cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

$$= A(t)\cos\varphi(t)\cos\omega_c t - A(t)\sin\varphi(t)\sin\omega_c t$$

令 $n_c(t) = A(t)\cos\varphi(t)$ 为噪声的同相分量

令 $n_s(t) = A(t)\sin\varphi(t)$ 为噪声的正交分量

则 $n(t) = n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$

特点：

（1）一个均值为零的窄带高斯噪声$n(t)$，假定它是平稳遍历随机过程，则它的同相分量$n_c(t)$和正交分量$n_s(t)$也是平稳遍历随机过程。

（2）三者都是均值为零的高斯分布；

（3）三者方差也相同： $\sigma^2 = \sigma_c^2 = \sigma_s^2$

即三者的交流功率相等.

(4)窄带高斯噪声的随机幅度和相位形成窄带包络

$$\left.\begin{aligned} &\text{包络}\quad A(t)=\sqrt{n_c^2(t)+n_s^2(t)}\quad,\quad \mathrm{A}(t)\geq 0 \\ &\text{相位}\quad \varphi(t)=\arctan\frac{n_s(t)}{n_c(t)}\quad,\quad 0\leq\varphi(t)\leq 2\pi \end{aligned}\right\}\text{缓慢变化}$$

随机包络服从瑞利分布:

$$f(A)=\frac{A}{\sigma_n^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)\quad (A\geq 0)$$

窄带高斯噪声的随机相位服从均匀分布:

$$f(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & ,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0 & ,\quad \text{其它}\end{cases}$$

3、正弦波加窄带高斯噪声

研究窄带高斯噪声是因为通信中经常需要把信号调制到角频率为ω_c的载波上加以传输。接收端则以ω_c为中心角频率的带通滤波器取回信号，同时也就限制了进入接收装置的白噪声，只容许ω_c为中心角频率的调制信号与加性窄带噪声进入系统。对此，建立的数学模型就是正弦波加窄带高斯噪声：

$$r(t) = A\cos(\omega_c t + \theta) + n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$$

$$= [A\cos\theta + n_c(t)]\cos\omega_c t - [A\sin\theta + n_s(t)]\sin\omega_c t$$

若写：$r(t) = z(t)\cos(\omega_c + \varphi)$

式中：$$\begin{cases} z(t)=\sqrt{[A\cos\theta(t)+n_c(t)]^2+[A\sin\theta(t)+n_s(t)]^2} \\ \varphi(t)=\arctan\dfrac{A\sin\theta(t)+n_s(t)}{A\cos\theta(t)+n_c(t)} \end{cases}$$

在 θ 给定的条件下，包络$z(t)$服从Rice概率密度：

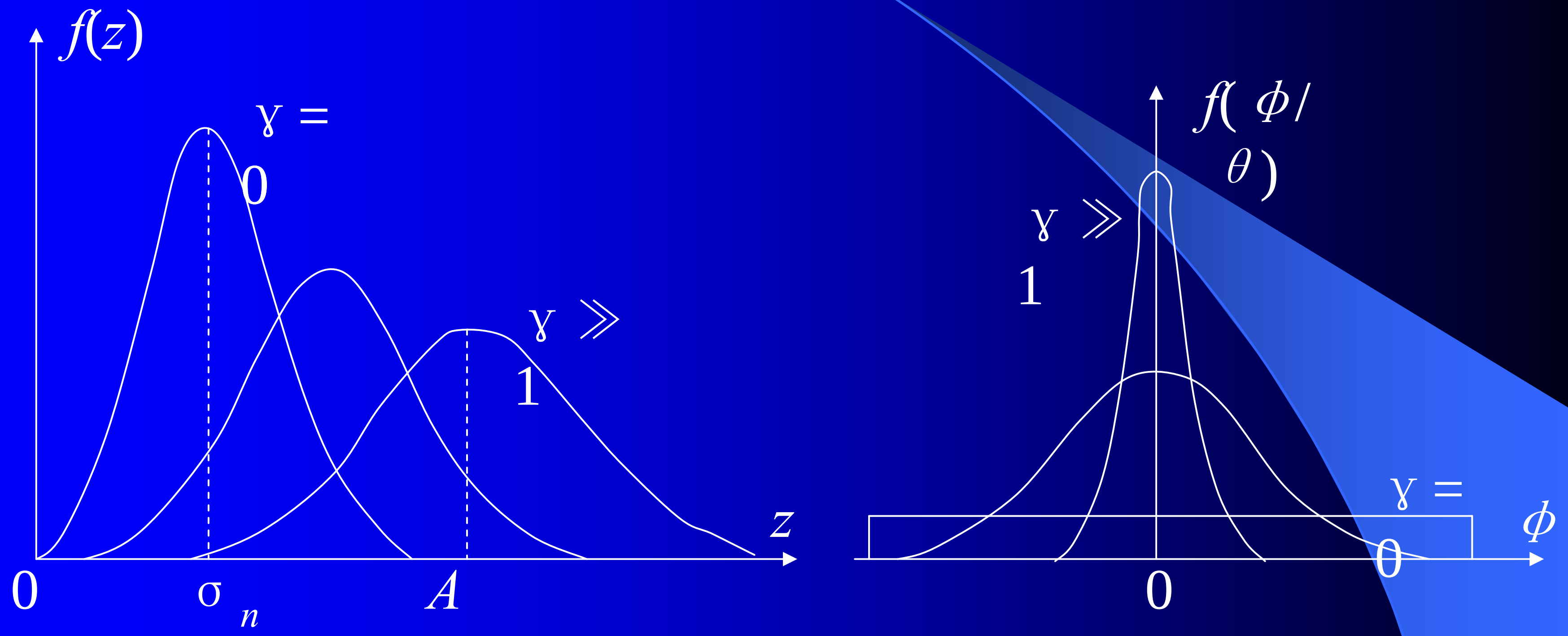
$$f(z/\theta)=\frac{z}{\sigma_n^2}\exp[-\frac{z^2+A^2}{2\sigma_n^2}]\cdot I_0(\frac{Az}{\sigma_n^2})$$

式中$I_0(x)$是零阶修正贝塞尔函数。

（1）当信噪比很小时，$z(t)$退化为瑞利分布，相位 $\phi(t/\theta)$近似服从均匀分布；

（2）当信噪比较大时，$z(t)$近似为高斯分布，相位 $\phi(t/\theta)$主要集中在有用信号相位附近。

正弦波加窄带高斯噪声的包络和相位的概率密度函数



图中， γ 为信噪比。

Random Processes

This chapter presents an introductory treatment of stationary random processes with emphasis on second-order statistics. In particular,it discusses the following issues:

- ***The notion of a random process.***
- ***The requirement that has to be satisfied for a random process to be stationary.***

- ***The partial description of a random process in terms of its mean, variance, correlation, and covariance functions.***

- ***The conditions that have to be satisfied for a stationary random process to be ergodic,a property that enables us to substitute time averages for ensemble averages.***

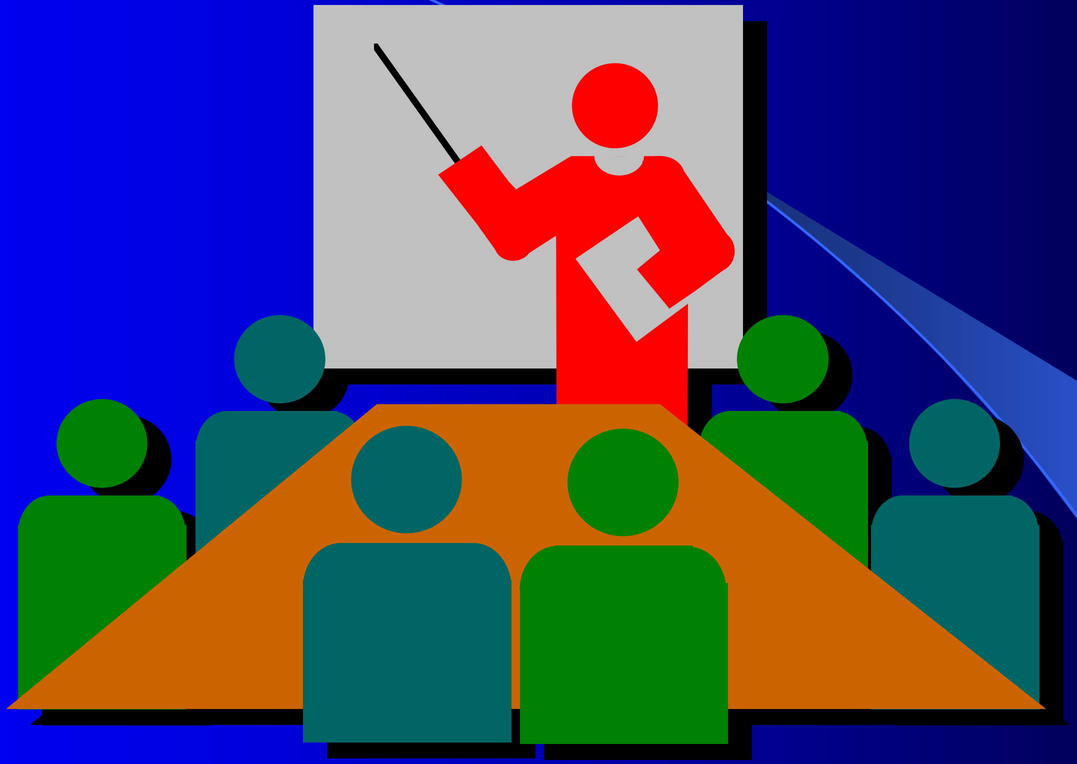
- ***What happens to a stationary random process when it is transmitted through a linear time-invariant filter?***

- ***The frequency-domain description of a random process in terms of power spectral density.***

- ***The characteristics of an important type of random process known as a Gaussian process.***

- ***Sources of noise and their narrowband form.***

- ***Rayleigh and Rician distributions, which represent two special probability distributions that arise in the study of communication systems.***



谢　谢　大　家