【例 12-1】 已知某四进制离散等概信源(0,1,2,3)，其符号出现概率分别为 1/2，1/4，1/8，1/8，且相互独立，求信源发送 13201010100201300200100210300101020010030103210 消息时的信息量。

解法一：用实际出现的次数来计算。本消息共 47 个符号，其中 0 出现 24 次，1 出现 12 次，2 出现 6 次，3 出现 5 次。这四个符号出现的概率分别为 P(0)=1/2，P(1)=1/4，P(2)= P3)=1/8，因此每个符号所包含的信息量为

$$I_0 = -\log_2 P(0) = -\log_2 \frac{1}{2} = 1bit\text{，}\quad I_1 = 2bit\text{，}\quad I_2 = I_3 = 3bit$$

所以

$$I = 24I_0 + 12I_1 + 6I_2 + 5I_3 = 24\times 1 + 12\times 2 + 6\times 3 + 5\times 3 = 81(bit)$$

解法二：用熵计算

$$H = -\sum_{i=0}^{3} P(x_i)\log_2 P(x_i) = \sum_{i=0}^{3} P(x_i) I_i = 1.75(bit/symbol)$$

又 m＝47，所以

$$\text{I=mH=47}\times\text{1.75=82.25(bit)}$$

说明：两种解法结果出现差异，这是由于解法二用了熵的概念，而熵是统计平均的结果，因而解法二是统计运算，需要用到无穷多个数据。相反地，解法一是针对一个实际消息的运算，它仅包含有限个数据。

【例 12-2】 设有一个二进制对称信道 BSC，其输入符号 x_1、x_2 的概率分别为 $P(x_1)=\alpha$，$P(x_1)=\beta=1-\alpha$，输入符号速率为 *Rs*，信道误码率为 *p*，试求 BSC 信道的信道容量 C。

解：由题意可画出信道模型如图 12-1 所示：由于误码率为 p，因此正确传输概率为 q=1-p。为求信道容量 *C*，需先求信息量 *I(X,Y)*，再求其最大值，最后再乘以 *Rs* 即可。

(1) 求 *I(X,Y)*。

由公式

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} P\left(y_j\right)\log_2 P\left(y_j\right)$$

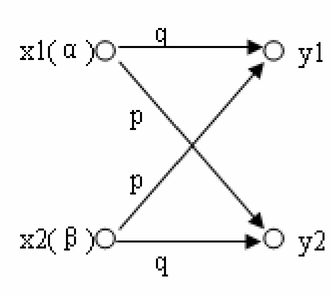

图 12-1 例 12-2 图 1

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\sum_{j=1}^{m} P(y_j|x_i)\log_2 P(y_j|x_i)$$

先求 $P(y_j)$，由图可知（注意 α+β=1， p+q=1）

$$P(y_1) = P(x_1)P(y_1|x_1) + P(x_2)P(y_1|x_2) = \alpha q + \beta p$$

$$P(y_2) = P(x_1)P(y_2|x_1) + P(x_2)P(y_2|x_2) = \alpha p + \beta q$$

令

$$S = \alpha p + \beta q \text{ 得 } P(y_2) = S\text{，}\quad P(y_1) = 1 - S$$

于是

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} P(y_j)\log_2 P(y_j) = -(1-S)\log_2(1-S) - S\log_2 S$$

可写成

$$H(Y) = H(S) = H(\alpha p + \beta q)$$

又

$$
\begin{aligned}
H(Y\mid X) &= -\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\sum_{j=1}^{m}P(y_j\mid x_i)\log_2 P(y_j\mid x_i) \\
&= -P(x_1)[P(y_1\mid x_1)\log_2 P(y_1\mid x_1)+P(y_2\mid x_1)\log_2 P(y_2\mid x_1)] \\
&\quad -P(x_2)[P(y_1\mid x_2)\log_2 P(y_1\mid x_2)+P(y_2\mid x_2)\log_2 P(y_2\mid x_2)] \\
&= -\alpha[q\log_2 q+p\log_2 p]-\beta[p\log_2 p+q\log_2 q] \\
&= -p\log_2 p-q\log_2 q=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)
\end{aligned}
$$

可写成

$$H(Y\mid X)=H(p)$$

于是

$$I(X,Y)=H(Y)-H(Y\mid X)=H(S)-H(p)$$

(2) 求 $\max\limits_{|p(x)|} I(X,Y)=\max\limits_{(\alpha)} I(X,Y)$。

令 $\dfrac{\partial I(X,Y)}{\partial\alpha}=0$，求最大值。由于 H(p) 与 α 无关，故应求 $\dfrac{\partial H(S)}{\partial\alpha}=0$，即

$$\frac{\partial H(S)}{\partial\alpha}=\frac{\partial H(S)}{\partial S}\bullet\frac{\partial S}{\partial\alpha}=0$$

由于

$$H(S)=-(1-S)\log_2(1-S)-S\log_2 S$$

令

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H(S)}{\partial S} &= -\log_2 S-S\bullet\frac{1}{S}\bullet\frac{1}{\ln 2}+\log_2(1-S)+(1-S)\bullet\frac{1}{1-S}\bullet\frac{1}{\ln 2} \\
&= \log_2\left[\frac{1-S}{S}\right]=0
\end{aligned}
$$

得

$$\frac{1-S}{S}=1$$

于是 S=1/2 。

由于

$$S=\alpha p+\beta q=\alpha p+(1-\alpha)q=\alpha(p-q)+q$$

令 $\dfrac{\partial S}{\partial\alpha}=p-q=0$，得 p=q 。又 p+q=1，所以 p=q=1/2 。代入，得

$$S=\alpha p+\beta q=1/2\times(\alpha+\beta)=1/2$$

与 $\dfrac{\partial \mathrm{H(S)}}{\partial \mathrm{S}}=0$ 的结果相同。

于是

$$H(Y)=H(S)=H(1/2)=-1/2\log_2(1/2)-(1-1/2)\log_2(1-1/2)=1$$

最后

$$\max_{(\alpha)} I(X,Y)=1-H(p)$$

(3) $C=\max\limits_{|p(x)|} R=R_s\max\limits_{|p(x)|} I(X,Y)=R_s\left[1-H(p)\right]\left(bit/s\right)$

(4) 结论：

a. 在二进制对称信道中，当输入信源等概时，可以达到信道容量

$$C = R_s\left[1 - H(p)\right](bit/s)$$

b. 实际上，对 BSC 信道，当输入符号等概时，有 α=β=1/2，从而 S=1/2，即输出符号亦等概。

c. 由 $C/R_s = 1 - H(p)$ 还可以进一步画出 C/R_s~p 的曲线，如下图所示。

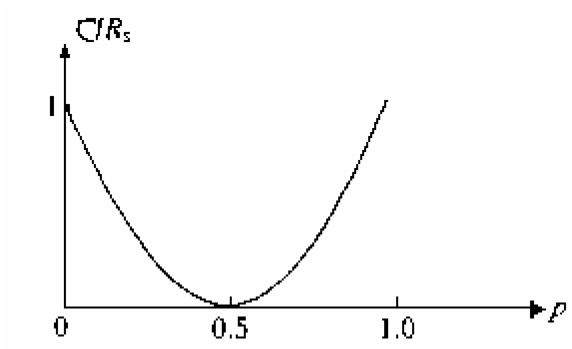

图 12-2 例 12-2 图 2

由图 12-2 可见：

当 p=0 时，相当于无噪情况，传输无差错，C/R_s=1，C 已达到最大值。

当 p=0.5 时，C/R_s=0。此时误码概率为 1/2，发与不发已无任何意义，相当于信道断开，当然 C=0。

当 p=1 时，C/R_s=1，同样达到最大值，相当于噪声极大情况。但本质上看相当于“0”、“1”倒置的无噪情况，故与 p=0 情况相同。