【例 2-1】 试求下列两种分布的数学期望m和方差σ^2。

（1） 均匀分布

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & -a\le x<a\\ 0 & x<-a,x\ge a\end{cases}$$

（2） 瑞利分布

$$p(x)=\frac{2x}{b}e^{\frac{x^2}{b}} \qquad x\ge 0$$

解：（1）均匀分布时

$$m=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_{-a}^{a}x\frac{1}{2a}dx=0$$

$$\sigma^2=D(X)=E(X^2)-E^2(X)=E(X^2)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=\int_{-a}^{a}x^2\frac{1}{2a}dx=\frac{1}{3}a^2$$

(2)瑞利分布时

$$m=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\frac{2}{b}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{b}}dx=-\int_0^{\infty}xd(e^{-\frac{x^2}{b}})$$

$$=-xe^{-\frac{x^2}{b}}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{b}}dx=\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{b}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi b}$$

$$\sigma^2=E(X^2)-E^2(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx-m^2$$

令$y=\dfrac{x^2}{b}$，则式中，$\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=b\int_0^{\infty}ye^{-y}dy=-b\int_0^{\infty}yd(e^{-y})=-bye^{-y}\Big|_0^{\infty}+b\int_0^{\infty}e^{-y}dy$

$$=b\int_0^{\infty}e^{-y}dy=-be^{-y}\Big|_0^{\infty}=b$$

说明：本例目的在于：熟悉数学期望和方差的积分计算；熟悉变量置换和分部积分技巧。

【例 2-2】 已知一随机过程$z(t)=m(t)\cos(\omega_0 t+\theta)$，$m(t)$是广义随机过程。载频的相位$\theta$在（0，$2\pi$）上为均匀分布，设$m(t)$与$\theta$是统计独立的，且$m(t)$的自相关函数$R_m(\tau)$为

$$R_m(\tau)=\begin{cases}1+\tau, & -1<\tau<0\\ 1-\tau, & 0\le\tau<1\\ 0\ \ , & \text{其它}\ \tau\end{cases}$$

（1）证明$z(t)$是广义平稳的；

（2）绘出自相关函数$R_z(\tau)$的波形；

（3）求功率密度$P_z(\omega)$及功率 S。

解：（1）由题意可知，$m(t)$的数学期望为常数；$f(\theta)=\dfrac{1}{2\pi},(0\le\theta\le 2\pi)$，则

$$
\begin{aligned}
&E[z(t)]=E[m(t)\cos(\omega_0 t+\theta)]\\
&=E[m(t)]\bullet\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_z(t_1,t_2)=E[z(t_1)z(t_2)]=E[m(t_1)\bullet\cos(\omega_0 t_1+\theta)\bullet m(t_2)\bullet\cos(\omega_0 t_2+\theta)]\\
&=E[m(t_1)\bullet m(t_2)]\bullet E[\cos(\omega_0 t_1+\theta)\bullet\cos(\omega_0 t_2+\theta)]\\
&=R_m(\tau)\bullet E\left\{\frac{1}{2}\cos[2\theta+\omega_0(t_1+t_2)]+\frac{1}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2)\right\}\\
&=R_m(\tau)\bullet\left\{E\left[\frac{1}{2}\cos[2\theta+\omega_0(t_1+t_2)]\right]+E\left[\frac{1}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2)\right]\right\}\\
&=R_m(\tau)\bullet\left[0+\frac{1}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2)\right]=R_m(\tau)\bullet\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\\
&=R_z(\tau)
\end{aligned}
$$

可见，$z(t)$均值与 t 无关，自相关函数只与时间间隔τ有关，故$z(t)$广义平稳。

（2）　$R_z(\tau)=\dfrac{1}{2}R_m(\tau)\cos\omega_0\tau$

$$
=\begin{cases}
\dfrac{1}{2}(1+\tau)\cos\omega_0\tau, & -1<\tau<0\\
\dfrac{1}{2}(1-\tau)\cos\omega_0\tau, & 0\le\tau<1\\
0\qquad\qquad\qquad, & \text{其它}\tau
\end{cases}
$$

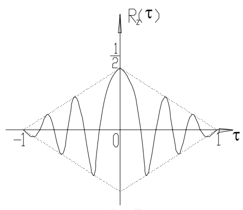

图 2-1　例 2-2 图

其波形如图 2-5 所示。

（3）$\because z(t)$广义平稳，$\therefore$其功率谱密度$P_z(\omega)\Leftrightarrow R_z(\tau)$。由图 2-1 可见，$R_z(\tau)$的波形可视为一余弦函数与一三角波的乘积，因此

$$
\begin{aligned}
&P_z(\omega)=\frac{1}{2\pi}\bullet\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]*\frac{1}{2}Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\bullet 1\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[Sa^2\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}\right)+Sa^2\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
S=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_z(\omega)d\omega=\frac{1}{2}
$$

或　　　$S=R_z(0)=\dfrac{1}{2}$